NORMAL DAĞILIŞLI BAĞIMSIZ İKİ GRUP ORTALAMALARI TESTİ

BİYOİSTATİSTİK VE TIP BİLİŞİMİ A.D.

İKİ 0RTALAMA ARASINDAKİ FARKIN (μ_1 - μ_2) TESTİ

İki ortalama arasındaki farkın testi yapılırken, kullanılacak test istatistikleri popülasyon varyansının bilinmesi ve örnek büyüklüğü dikkate alınarak aşağıdaki şekilde bir sınıflama yapılabilir :

Gözlemler normal dağılış gösteriyorsa ve;

1) Populasyon varyansları ($\sigma^2{}_1$, $\sigma^2{}_2$) bilinivor veya populasyon varyansları bilinmiyor ancak örnekler büyükse ($n \geq 30$)

2) Populasyon varyansları bilinmiyor fakat homojen kabul edilebiliyorsa ($\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2$),

3) Populasyon varyansları bilinmiyor fakat homojen kabul edilemiyorsa ($\sigma^2{}_1 \neq \sigma^2{}_2$),

Bu varsayımları kontrol için yapılacak kontroller

- Normallik ve simetriyi kontrol et
  - Ortalama ve ortanca incele
  - Çarpıklık ve basıklık katsayılarını incele
  - Her grubun histogram ve kutu grafiklerini çiz ve incele
- Variyans homojenliğini kontrol için
  - Kutu grafiklerini incele
  - Serpilme grafiklerini incele
- Aşırı gözlemleri belirlemek için
  - Kutu grafikleri incele
  - Serpilme grafiklerini incele
  - Histogramları incele

Populasyon varyansları (σ^2_1 , σ^2_2) biliniyorsa Z-test istatistiği)

- σ^2_1 ve σ^2_2 'nin değerleri biliniyorsa H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ hipotezine karşılık
  H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ alternatif hipotezinin testi için

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{\;2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\;2}}{n_2}}} \approx N_Z(0,1)$$

- test istatistiğinin değeri $\pm Z_{(1-\alpha/2)}$ cetvel değeri (burada yer alan indis kullanılan Z-cetveline göre farklı şekillerde yazılabilir, bu gösterim sağ kuyruk değerin cetvelden okunması hali için geçerlidir) ile karşılaştırılır. Eğer H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$ ise $Z_{(1-\alpha)}$ cetvel değeri ile,
- eğer H_1: $\mu_1 - \mu_2 < 0$ ise Z_{α} cetvel değeri ile karşılaştırılır.

Popülasyon Variyansı $(\sigma^2_1 , \ \sigma^2_2)$ Biliniyor.

- Araştırıcı, Psikoloji ve sosyoloji öğrencilerinin paranoya testinden aldıkları puanları karşılaştırmak için bir araştırma yapıyor.

Psikoloji ve sosyoloji öğrencilerine MMPI testi N(50,10) uygulanıyor.

13 psikoloji öğrencisinin ortalama test puanı=63.46,

11 sosyoloji bölümü öğrencisinin ortalama puanı ise 53.81 olarak bulunuyor. Her iki grup ortalamalarının farklı olup olmadığını test ediniz.

Hipotezler: iki farklı şekilde kurulabilir:

$H_0 : \mu_p = \mu_s$	$H_0 : \mu_p - \mu_s = 0$
$H_1 : \mu_p \neq \mu_s$	$H_1 : \mu_p - \mu_s \neq 0$

Test İstatistiği (Z) Hesabı ve Karar verilmesi

Verilenler :

$\alpha = .05,$

$n_p = 13,$

$n_s = 11$

$\bar{x}_p = 63.46$, $\bar{x}_s = 53.81$

$$Z_{hesap} = \frac{\bar{x}_p - \bar{x}_s}{\sqrt{\frac{\sigma_p^2}{n_p} + \frac{\sigma_s^2}{n_s}}}$$

$$= \frac{63.46 - 53.81}{\sqrt{\frac{100}{13} + \frac{100}{11}}}$$

$$= \frac{9.64}{4.10}$$

$$= 2.35$$

$p(z > 2.35) = .00949$

$p(z < -2.35) = .00949$, $P_h = 0{,}0188$

$P_h = 0{,}0188 < 0{,}05 = P_C = \alpha$

H0 ret edilir

Karar: Psikoloji bölümü öğrencilerinin MMPI puan ortalamaları sosyoloji bölümü öğrencilerinden önemli derecede farklıdır (p<0,05)

Ortalama Farkının % 95 lik Güven Sınırları

$$\overline{X}_p - \overline{X}_s \pm \left(z_{crit} * \sqrt{\frac{\sigma_p^2}{n_p} + \frac{\sigma_s^2}{n_s}} \right)$$

$$\Rightarrow (63.46 - 53.81) \pm \left(1.96 * \sqrt{\frac{100}{13} + \frac{100}{11}} \right)$$

$$\Rightarrow 9.65 \pm (1.96 * 4.09)$$

$$\Rightarrow (1.62, 17.68)$$

ÖRNEK :(σ^2_1 , σ^2_2) Biliniyor,

- Variyansı $\sigma^2_1 = 12$ olan bir populasyondan $n_1 = 8$, varyansı $\sigma^2_2=15$ olan diğer populasyondan ise $n_2=6$ fertlik örnekler alınmıştır.

Populasyanlar normal dağılışlı olarak farzedildiğide.

- Örnek ortalamaları bulunduğuna göre %1 önem seviyesinde ortaya atılan
- H_0: $\mu_1 = \mu_2$ veya $\mu_1 - \mu_2 =0$ hipotezine karşı,
- H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ veya $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ hipotezine karşı

kontrol edilmek istenirse, ortalamaların farkın dağılışı;

$$\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) \approx N\left[(\mu_1 - \mu_2);\left(\frac{12}{8} + \frac{15}{6}\right)\right]$$

şeklinde bir dağılış gösterir.

Buna göre Z test istatistiği ,

$$Z=\frac{(15-11)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{12}{8}+\frac{15}{6}}}=\frac{(15-11)-(0)}{\sqrt{\frac{12}{8}+\frac{15}{6}}}=2.00\approx N_Z(0,1)$$

Yukarıda hesaplanan Z = 2.00 değeri, $P(Z<z_\alpha)$ için hazırlanmış cetvelden $\pm Z_{(1-\alpha/2)}$, yani $\alpha=0.01$ için

$Z_{(1-0.01/2)} = Z_{0.995}$ cetve1 değeri i1e veya $P(Z > z_\alpha)$ için hazırlanmış cetvelden $Z_{(\alpha/2)} = Z_{0.005}$ cetvel değeri ile karşılaştırılır.

Karar Aşaması:

$Z_{0.005} = \pm\ 2.58$ olduğundan mutlak değer olarak karşılaştırma yapılır ve | 2.0 | < | 2.58 | olur. Buna göre H0 hipotezi reddedilmemiştir.

Z	Eklemeli p	Kuyruk p
2.56	0.9948	0.0052
2.57	**0.9949**	**0.0051**
2.58	0.9951	0.0049

Variyanslar (σ^2_1 , σ^2_2) Bilinmiyorsa Örnek Tahminleri Kullanılır

iki grup için variyans tahmini

$$Var(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = Var(\overline{X}_1) + Var(\overline{X}_2) - 2\operatorname{cov}(\overline{X}_1, \overline{X}_2)$$

Bu 3. terim sıfır olur !

1. İki grup bağımsız ise:
   - Variyanslar heterojen ise:

$$Var(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = Var(\overline{X}_1) + Var(\overline{X}_2) + 0$$

$$= \frac{Var(X_1)}{n_1} + \frac{Var(X_2)}{n_2}$$

- İki grup variyansı homojense:

Yani, $Var(X_1) = Var(X_2)$ ise

$$Var(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \frac{Var(X)}{n_1} + \frac{Var(X)}{n_2}$$

$$= Var(X)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

$$Var(X) = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

Varyanslar **bilinmiyor** fakat **homojense** ($\sigma^2_1 = \sigma^2_2$) bu durumda **Student t-test** istatistiği kullanılır :

- H_0: $\sigma^2_1 = \sigma^2_2$ hipotezi yapılan test sonucunda kabul edildiğinde
- iki örnekli t-istatistiği kullanılır.
- Ho : $\mu_1 - \mu_2 = 0$; H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ için t-istatistiği;

$$\boxed{t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p{}^2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \approx t_{(n_1 + n_2 - 2;\alpha/2)}}$$

olup burada,

Ortak variyans (S^2_p) hesabı

$$Sp^2 = \frac{(n_1 - 1)\cdot S_1^{\,2} + (n_2 - 1)\cdot S_2^{\,2}}{(n_1 + n_2 - 2)}$$

dir.

İlgili hipotezler ve kritik tablo değerleri,

- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ için $\pm\ t_{(\alpha/2;n1+n2-2)}$
- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$ için $+\ t_{(\alpha;n1+n2-2)}$
- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$ için $-\ t_{(1-\alpha/2;n1+n2-2)}$

(tablodan okunan t değerinin <u>negatif değerlisi</u> alınır) cetvel değerleri ile karşılaştırılır.

Örnek: Elle ve SPSS ile Çözümü,

- Psikologlar uykunun hatırlama üzerine etkisini araştırıyor. Günde 8 saat uyuyan 12 öğrenci ile günde 5 saat uyuyan diğer 12 öğrenciye hatırlama testi uyguluyor. Aldığı puanlar aşağıdaki şekilde belirleniyor.

8 saat uyuyan		5 saat uyuyan	
55	58	48	55
43	45	38	40
51	48	53	49
62	54	58	50
35	56	36	58
48	32	42	25

Hipotez ve Test İstatistiği

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

veya

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Şeklinde H_0 ve H_1 kurlabilir

$$\alpha = 0.05 \; , \; n_1 = 12 \; , \; n_2 = 12$$

$$t_{hes} = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - 0}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

$$S_p = S_{ortak} = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}} = \sqrt{\frac{(11)9.06^2 + (11)10.02^2}{22}} = 9.5509$$

$$t_h = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(48.92 - 46.00)}{9.5509\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{12}}} = \frac{2.92}{3.899} = \boxed{0.748}$$

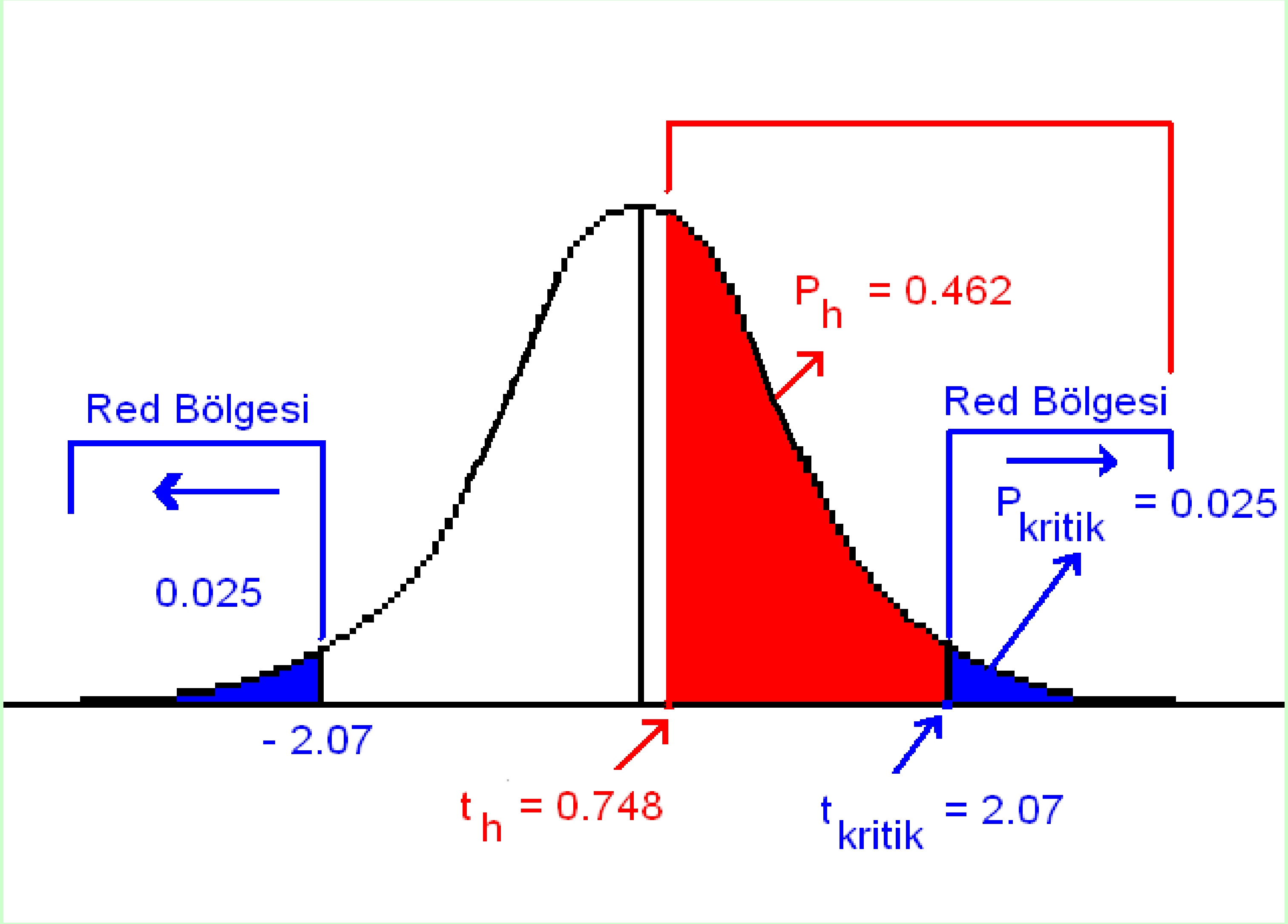
$$\boxed{p_h = 0.462} > 0.05 = p_{kritik} = \alpha$$

Veya

$$\left| t_{h(22)} = 0.748 \right| < \left| 2.07 = t_{kritik}(22) \right|$$

Ho ret edilemez, Karar: İki grup arasında istatistiki olarak önemli bir fark yoktur (p>0.05)

Kritik Dağılış Değeri ve olasılığı



Ortalama Farkının Güven sınırları

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm \left(t_{\text{kritik}} * \; s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

$$2.92 \pm (2.074 * 3.899) \Rightarrow \boxed{(-5.17, 11.00)}$$

SPSS Çözümü: Gurup-1 tanımlayıcı istatistikleri

	GROUP			Statistic	Std. Error
MEMORY	1.00	Mean		48.9167	2.61539
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	43.1602	
			Upper Bound	54.6731	
		5% Trimmed Mean		49.1296	
		Median		49.5000	
		Variance		82.083	
		Std. Deviation		9.05999	
		Minimum		32.00	
		Maximum		62.00	
		Range		30.00	
		Interquartile Range		12.2500	
		Skewness		-.601	.637
		Kurtosis		-.255	1.232

Gurup-2 tanımlayıcı istatistikleri

GROUP				Statistic	Std. Error
MEMORY	2.00	Mean		46.0000	2.89200
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	39.6348	
			Upper Bound	52.3652	
		5% Trimmed Mean		46.5000	
		Median		48.5000	
		Variance		100.364	
		Std. Deviation		10.01817	
		Minimum		25.00	
		Maximum		58.00	
		Range		33.00	
		Interquartile Range		16.0000	
		Skewness		-.687	.637
		Kurtosis		.048	1.232

	GROUP	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
MEMORY	1.00	12	48.9167	9.05999	2.61539
	2.00	12	46.0000	10.01817	2.89200

Variyanslar homojense ilk satır esas alınır
Değilse ikinci satır esas alınır.

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
MEMORY	Equal variances assumed	.256	.618	.748	22	.462	2.9167	3.89922	-5.16982	11.00315
	Equal variances not assumed			.748	21.781	.462	2.9167	3.89922	-5.17453	11.00786

Variyans homojenlik testi
0.618 >0.05 homojendir

Hesaplanan t-istatistiği
t=0.748

Hesaplanan p olasılığı
0.462

ÖRNEK:

Denek sayısı farklı olan iki gruptan birincisine <u>A muamelesi</u>, ikincisine <u>B muamelesi</u> uygulanıyor. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde bulunuyor:

											ni		S_i^2
A Muamelesi	18	13	12	14	19	17	11	15	18	13	10	15	8
B Muamelesi	12	8	15	9							4	11	10

H_0 ; $\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2$ ' in testi için basit olarak <u>F testi ile variyans homojenlik kontrolü</u> yapılırsa;

$$F = \frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}} = \frac{10}{8} = 1.25 \text{ olur.}$$

4 den küçükse kabaca homojen kabul edilebilir.

- Bu değer, F max tablo değeri $F_{(3,9,0.05)} = 3.86$ değeri ile karşılaştırılırsa varyansların homojen olduğuna dair sıfır hipotezi reddedilemez ($P>0.05$).
- Madem ki varyanslar homojen kabul edilebilmekte, bu durumda ortak bir varyans altında her iki örneğin varyansını birleştirmek mümkündür.
- Böylece birleştirilmiş (ortak) varyans,

$$Sp^2 = \frac{(n_1 - 1)\cdot S_1^{\,2} + (n_2 - 1)\cdot S_2^{\,2}}{(n_1 + n_2 - 2)} = \frac{(10-1)\cdot 8 + (4-1)\cdot 10}{(10+4-2)} = 8.5$$

Test İstatistiği Hesabı

olur.

Bu durumda

H_0 : μ_1- μ_2 = 0 karşı ,

H_1 : μ_1- μ_2 $\neq$ 0 testi için t-istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$t = \frac{(15-11)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{8.5\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\right)}} = \frac{(15-11)-(0)}{\sqrt{8.5\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\right)}} = 2.32 \approx t_{(n_1+n_2-2;\alpha/2)}$$

|2.32|>|$t_{(12,0.05)}$ = 2.18| olduğundan Ho reddedilir. Yani karar: iki muamele ortalaması istatistiki olarak birbirinden önemli derecede farklıdır (P < 0.05).

Bu test istatistiğinde
iki örnek büyüklüğü ($n1= n2= n$) eşit ise,

birleştirilmiş varyans S^2p daha kolay hesaplanır.

$S^2p = (S^2_1+S^2_2) / 2$ ve t-istatistiği daha basit yazılabilir:

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^{\,2} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)}} \approx t_{(2.n-2;\alpha/2)}$$

olur.

Varyanslar (σ^2_1 ve σ^2_2) bilinmiyor ve eşit varsayılamıyorsa **($\sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$)** yaklaşık t-testi olan Satterthwaite -t (t'-test istatistiği) kullanılır:

$Ho : \sigma^2_1 = \sigma^2_2$, $H_1 : \sigma^2_1 > \sigma^2_2$ hipotezleri, variyans heterojenlik testlerinden biri ile veya iki varyansın oranına ait F dağılışı ile test edildiğinde, H0 ret edilirse popülasyon variyanslarının eşit olmadığına karar verilir.

Dolayısıyla bu durumda ortak bir variyans (S^2p) bulunamayacaktır. Bu durumda t benzeri bir test istatistiği olan t' istatistiği kullanılabilir.

Ho : $\mu 1- \mu 2 = 0$,

H1 : $\mu 1- \mu 2 \neq 0$ için sözü edilen test istatistiği,

$$t' = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^{\,2}}{n_1} + \frac{S_2^{\,2}}{n_2}}} = t_{(v, \alpha/2)}$$

şeklindedir ve Welch veya Satterthwaite testi, yaklaşık t dağılışı gösterir.

Bu test istatistiğine ait cetvel değeri yeni bir serbestlik derecesi (v) hesaplanarak elde edilebilir.

- $w_1 = S^2_1 / n_1$ ve $w_2 = S^2_2 / n_2$ denirse,

yaklaşık serbestlik derecesi (v) aşağıdaki şekilde hesaplanır,

$$\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)^2}{\dfrac{\mathbf{w}_1^{\,2}}{\mathbf{n}_1 - 1} + \dfrac{\mathbf{w}_2^{\,2}}{\mathbf{n}_2 - 1}}$$

Veya doğrudan t değerleri kullanılabilir

Dolayısıyla $t' \sim t_{(v,\alpha/2)}$ dağılışı gösterir. t cetvelinden v serbestlik dereceli $\alpha/2$ olasılıklı değer bulunur ve hesaplanan değerle karşılaştırılır.

t' 'ne ait cetvel değerinin bir başka hesaplanış şekli ise şöyledir: t-Cetvelinden (n_1-1) s.d. için t_1 değeri ve (n_2-1) s.d. için t_2 değeri' okunur, aşağıdaki formül yardımı ile doğrudan karşılaştırılacak değer bulunur. Bu t' cetvel değeri,

$$t'_{(cetvel)} = \frac{w_1 \cdot t_1 + w_2 \cdot t_2}{w_1 + w_2}$$

formülü ile bulunabilir.

Örnek

	A muamelesi	B muamelesi
	100	113
	101	117
	100	105
	105	115
	101	116
	104	108
	102	120
	-	118
	-	116
	-	112
n_i	7	10
Ortalamalar	101.86	114.00
S_i^2	3.81	19.43

Variyans homojenlik kontrolü yapmak için,

- $H_0: \sigma^2_1 = \sigma^2_2$, $H_1 : \sigma^2_1 > \sigma^2_2$ hipotezi test edilecek olursa, $F = 19.43 / 3.81 = 5.10 > 4.10 = F_{9,6,0.05}$ olduğundan varyanslar heterojendir.

Dolayısıyla t' istatistiği kullanılmalıdır.

Hipotezler ,

- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$,
- $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ise ;

Test İstatistiği Hesaplanması

$$t' = \frac{(101.85 - 114.00) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{3.81}{7} + \dfrac{19.43}{10}}} =$$

$$\frac{(101.85 - 114.00) - (0)}{\sqrt{\dfrac{3.81}{7} + \dfrac{19.43}{10}}} =$$

$$\frac{12.25}{1.577} = -7.762 \approx t_{(v, \alpha/2)}$$

yaklaşık serbestlik derecesi ,

Yaklaşık Serbestlik Derecesi (v) Hesabı

$$v = \frac{\left(\frac{3.81}{7} + \frac{19.43}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{3.81}{7}\right)^2}{7-1} + \frac{\left(\frac{19.43}{10}\right)^2}{10-1}} = 13.196 \approx 13$$

Karar Aşaması:

Cetvelden $t_{13,0.05} = 2.160$ bulunur. $|7.762| > |2.160|$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir.

Diğer bir yol, t' cetvel değeri hesaplanırsa ;

$t_1=t_{6,0.05}= 2.447$, $t_2=t_{9,0.05}= 2.262$ olduğundan

$w_1 =3.81/ 7 = 0.5443$ $w_2=19.433 / 10 =1.9433$

bulunur ve buradan,

t' cetvel $= (0. 5443x2.447 + l.9433x2.262) / (0. 5443 + 1.943) = 5.728 / 2.4876 = 2.302$

olarak bulunur.

Yine, $|7.762 |> |2.302|$ olduğundan H_0 reddedilir.

SPSS Çözümü

- Welch istatistiği sapmasız tahmin verir, ancak düzeltilmemiş-t değerinden daha az güçlüdür.
- Eğer popülasyon variyansları heterojense düzeltilmemiş-t değeri sapmalı tahmin verecektir.

		t-test for Equality of Means						
		t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference Lower	95% Confidence Interval of the Difference Upper
DV	Equal variances assumed	.228	18	.822	.2000	.87560	-1.63956	2.03956
	Equal variances not assumed	.228	10.368	.824	.2000	.87560	-1.74160	2.14160

SPSS de Variyanslar Eşit değilse Uygulanan Formüller

Serbestlik derecesi düzeltilir:

$$t_{obs} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$df = \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}{(n_2 - 1)c^2 + (n_1 - 1)(1 - c^2)}$$

$$c = \frac{\dfrac{s_1^2}{n_1}}{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}$$